標本と母集団

母集団 (population)

n ：標本の大きさ (sample size)

θ

抜き取り，抽出 (sampling)

標本，試料 (sample)

$x_1 , x_2 , x_3 , \cdots , x_n$

母数

母平均 (μ, m)

母分散 (σ^2)

母標準偏差 (σ)

母比率 (p)

母集団の範囲 （R)

母集団の相関係数 (ρ)

$\hat{\theta}$

母数の推定

標本の性質を示す数値

標本平均 ($\bar{x}$)

標本分散 (s^2)

標本の標準偏差 (s)

標本比率 ($\hat{p}$)

標本の範囲 （R)

標本の相関係数 (ρ) など

N：母集団の大きさ (population size)

統計的推定

パラメトリック推定　・・・・・・・・　母集団の分布既知

ノン・パラメトリック推定　・・・　母集団の分布未知

点推定　・・・・・　母数を1点(1つの値)で推定

ex 標本平均で母平均を推定

区間推定　・・・　母数を区間(一定の幅)で推定

点推定 (point estimation)

少数の標本から，母数をずばり
1つ数値で言い当てる．
どの推定量を利用するかの基準
・不偏性 (unbiasedness)
・一致性 (consistent)
・有効性 (efficiency)

不偏性

未知母数をθ，その推定量を$\hat{\theta}$としたとき，

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

となるような$\hat{\theta}$をθの不偏推定量と呼ぶ．

この推定量$\hat{\theta}$は不偏性をもつという．

たとえば

$$E(\bar{x}) = \{E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)\}/n$$
$$= (\mu + \mu + \cdots + \mu)/n$$
$$= \mu$$

すなわち, $\bar{x}$ は母平均μの不偏推定量である.

$E(\tilde{x}) = \mu$ となり,

$\tilde{x}$ も母平均μの不偏推定量である.

一致性

未知母数をθ，その推定量を$\hat{\theta}$としたとき，

$$\hat{\theta} \to \theta \qquad (n \to \infty)$$

となるような$\hat{\theta}$をθの一致推定量と呼ぶ．

この推定量$\hat{\theta}$は一致性をもつという．

有効性

2つの分散の異なる不偏推定量$\hat{\theta}$, $\bar{\theta}$

があるとき,

$$V(\hat{\theta}) \leqq V(\bar{\theta})$$

ならば，分散の小さい推定量$\hat{\theta}$が望ましい

このとき，$\hat{\theta}$は$\bar{\theta}$よりも有効性をもつという.

区間推定 (interval estimation)

ごく小数の標本から，母数を正確に言い当てることは実際には非常に難しい.

点推定に当たり外れがある(標本誤差を伴う)なら,

最初から1点で推定すること(点推定)はせず,

母数を含む一定幅の区間で推定(区間推定)をする.

この場合でも,

母数がこの区間内に入っているとは限らないので,

この区間内に入る精度を付けて推定する.

母平均(μ)の区間推定

母分散σ^2が既知

・・・　標準正規分布を利用

母分散σ^2が未知

・・・　t分布を利用

母分散(σ^2)既知の場合

母集団の分布が正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従うとき,
大きさ n の標本 x_1, x_2, ･･･, x_n の平均 $\bar{x}$ の分布は

正規分布 $N\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

すなわち, $$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

標準化(Z変換)

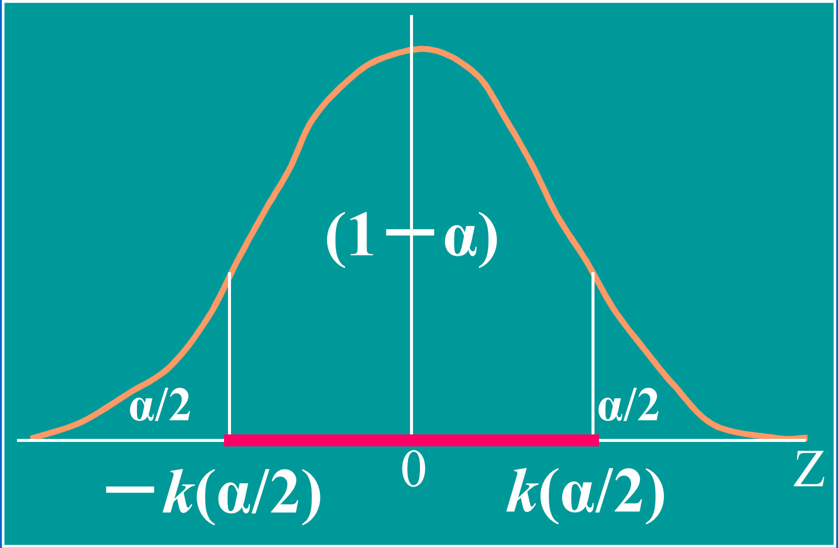
は標準正規分布 $N(0,\ 1^2)$ に従う.

推定区間

α(0＜α＜1) が与えられ，Zは標準正規分布に従う．
標準正規分布のグラフは直線 Z ＝ 0 で左右対称だから，

$$P(-k(\alpha/2) < Z < k(\alpha/2)) = 1-\alpha$$

となる $k(\alpha)$ が求められる．



μが区間

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

に含まれる確率は 1－α．

母平均の区間推定の手順（母分散既知）

（1）母集団 N (μ, σ^2) を仮定する

（2）大きさ n の標本を得る

$\bar{x}$ を求める

（3）信頼度 $1-\alpha$ のときの $u_{\frac{\alpha}{2}}$ の値を求める

（4）信頼度 $100\times(1-\alpha)$% の母平均 μ の信頼区間は

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

CONFIDENCE 関数

(母平均の推定区間)

$\alpha = 0.05$ のとき $u(\alpha/2) \fallingdotseq 1.96$

$\alpha = 0.01$ のとき $u(\alpha/2) \fallingdotseq 2.58$

例題(母分散既知の場合)

ある大学の学生食堂で学生一人あたりの昼食の平均支出額(μ)を調査した.
大きさ 41 の標本による標本平均値($\bar{x}$)は 380 円であった.
母分散(σ^2)を 68^2 として, この標本に対する μの 95% の信頼区間を求めよ.

[解答例]

$$\bar{x} - u(\alpha/2)\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u(\alpha/2)\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ だから

$$380-\boxed{1.96\times10.62} < \mu < 380+\boxed{1.96\times10.62}$$

=CONFIDENCE(0.05 , 68 , 41)

$$359.2 < \mu < 400.8$$

母分散(σ^2)未知の場合

母集団の分布が正規分布 N (μ, σ^2) に従い,
大きさ n の標本 x_1, x_2, ･･･, x_n の平均を $\overline{x}$ とすると,

$t =$

ε^2 は偏差平方和

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う.

母平均の区間推定の手順（母分散未知）

（1）母集団 N (μ, σ^2) を仮定する

（2）大きさ n の標本を得る

$\bar{x}$ と s^2 を求める　　　**S^2 は標本分散**

（3）自由度$n-1$，信頼度 $1-\alpha$ のときの $t_{\frac{\alpha}{2}}$ の値を求める

（4）信頼度$100\times(1-\alpha)$%の母平均μの信頼区間は

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{(n-1)}} \quad , \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{(n-1)}} \right)$$

偏差平方和，分散，不偏分散

81ページの式(10.2)の説明

偏差平方和 $= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

(標本の)分散 $= \dfrac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

不偏分散 $= \dfrac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

したがって，式(10.2)の分母の意味は

例題（母分散未知の場合）

某社の石けん25個の重さを調べたところ，標本平均値（$\overline{x}$）は 89.6g ，
標本分散（s^2）は 4.9 であった．石けん1個の重さの 99% の信頼区間を求めよ．

［解答例］

$n = 25$ だから，自由度（φ）＝ 24 ．

$\overline{x} = 89.6$ ，$s^2 = 4.9$ ，$t(\varphi=24,\ \alpha/2=0.005)=2.797$ より

$$\overline{x} - t(\alpha/2) \times \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{(n-1)}} < \mu < x \mp t(\alpha/2) \times \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{(n-1)}}$$

$$89.6 - 2.797 \times 0.452 < \mu < 89.6 + 2.797 \times 0.452$$

$$88.34\ \text{g} < \mu < 90.86\ \text{g} \quad /\!/$$

母平均の区間推定の手順（大標本の場合）

σの代わりにsを利用する

（1）母分散σ^2 を仮定する

（2）大きさ n の標本を得る

$\bar{x}$，標本標準偏差s（または不偏分散の平方根）を求める

（3）信頼度 $1-\alpha$ のときの $u_{\frac{\alpha}{2}}$ の値を求める

（4）信頼度$100\times(1-\alpha)$%の母平均μの信頼区間は

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$\alpha=0.05$ のとき $u(\alpha/2)\fallingdotseq 1.96$

$\alpha=0.01$ のとき $u(\alpha/2)\fallingdotseq 2.58$

復習 （母平均の区間推定）

区間推定は,

　点推定の値を中心にして推定幅を求める.

推定が外れる確率をα(危険率, 有意水準)とする

　αは, 同じ試行を何度も繰り返したとき,

　　　　　母平均(μ)が推定区間内にない確率である.

・母分散(σ^2)が既知の場合・・・標準正規分布を利用

・母分散(σ^2)が未知の場合・・・ t 分布を利用

・大標本の場合(母集団分布？)・・・標準正規分布を利用

母平均(μ)の推定区間　まとめ

μの点推定値

・母分散が既知の場合

$$\bar{x}-u_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+u_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

・母分散が未知の場合

$$\bar{x}-t_{(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n-1}}<\mu<\bar{x}+t_{(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

s^2 : 標本分散

$$\bar{x}-t_{(\alpha/2)}\frac{U}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{(\alpha/2)}\frac{U}{\sqrt{n}}$$

U^2 : 不偏分散

・大標本の場合

$$\bar{x}-u_{(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+u_{(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

s^2 : 標本分散

または不偏分散

母分散(σ^2)の区間推定

母分散の分布が $N(\mu,\ \sigma^2)$に従うとき

大きさ n の標本 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ から得られる

カイ2乗(カイ自乗)

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

の分布は，自由度 $n-1$ の χ^2分布に従う.

母分散の区間推定の手順

（1）母集団 N (μ, σ^2) を仮定する

（2）大きさ n の標本を得る

偏差平方和（S^2）を求める

（3）信頼度 1－α のときの

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ の値を求める

（4）信頼度100×(1－α)%の母分散σ^2の信頼区間は

$$\left(\frac{S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} , \frac{S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right)$$

例題(母分散の区間推定)

ラーメンのドンブリから無作為に麺を5本取り出し,
その太さ(mm)を測ったところ, 1.7　1.5　1.3　1.9　1.6　であった.
麺の太さのバラツキの程度を信頼度95%で推定せよ.

【解答例】

$\overline{x} = (1.7+1.5+1.3+1.9+1.6) / 5 = 1.6$

$S = (1.7-1.6)^2 + (1.5-1.6)^2 + \cdots + (1.6-1.6)^2 = 0.2$

自由度$(\varphi)=5-1=4$のχ^2分布表より,

$\chi^2(4, 0.025) = 11.143$　　　$\chi^2(4, 0.975) = 0.4844$

$S/\chi^2(4, 0.025) = 0.018$　　　$S/\chi^2(4, 0.975) = 0.413$

$\therefore\ 0.018 < \sigma^2 < 0.413$

麺の太さのバラツキは 0.018 と 0.413 の間にある.

母比率(p)の区間推定

1回の試行で成功の確率(母比率)p であるような
　事象を n 回独立に試みる
成功の回数を X で表すと

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\text{標本比率} - \text{母比率}}{\sqrt{\dfrac{\text{母比率}(1-\text{母比率})}{\text{標本の大きさ}}}}$$

この分布は n が大きいとき，$N(0,\ 1^2)$ で近似できる．

母比率の区間推定の手順

(1)　母集団 : nが大きな二項分布

(2)　標本比率 ($\hat{p} = X / n$) を求める

(3)　標準正規分布表より, $u(\alpha/2)$の値を求める

(4)　信頼度100×(1−α)%の母比率pの信頼区間は,
p の代わりに$\hat{p}$を使うと, 近似的に

$$\hat{p} - u(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

例題(母比率の区間推定)

ある政策について，2000人から賛否を聞いたところ，
1341人が賛成という結果を得た.
この結果より，
この政策の支持率 p の 99% の信頼区間を求めよ.

【解答例】

$$\hat{p} = 1341 / 2000 = 0.6705$$

標準正規分布表より，$u(\alpha/2) = 2.58$

$$2.58 \times \sqrt{0.6705(1-0.6705)/2000} \fallingdotseq 0.027$$

$$\therefore 0.6705-0.027 < p < 0.6705+0.027$$

$$0.6435 < p < 0.6975 \mathbin{/\!/}$$

統計的検定（test）

標本に基づいて母数（母集団のパラメータ）に関する仮説が妥当かどうかを調べること.

【検定の手続き】

①母数に関する互いに排他的な2組の仮説を設定する.

帰無仮説（H_0）・・・正しいものと仮定され，検定されるべき仮説

対立仮説（H_1）・・・帰無仮説の一部あるいは全部を否定したもの

②有意水準（α）を設定する.

③帰無仮説の受容域と棄却域を決める．その際，帰無分布のもとで検定統計量が棄却域に入る確率を有意水準と等しくなるように，受容域と棄却域の境界点（有意点）を決める.

④実際のデータから検定統計量を計算し，その値が有意点を越えたときには帰無仮説を棄却し，そうでなければ受容する.

⑤仮説が棄却されてとき(有意であったとき)，区間推定を行う.

第一種の過誤と第二種の過誤

常に正しい判断をするとは限らない.

誤った判断をすることがある.

誤り方には2種類がある.

・正しいものを誤りとしてしまう

⇒ 第一種の誤り(α:生産者危険)

・誤っているものを正しいとしてしまう

⇒ 第二種の誤り(β:消費者危険)

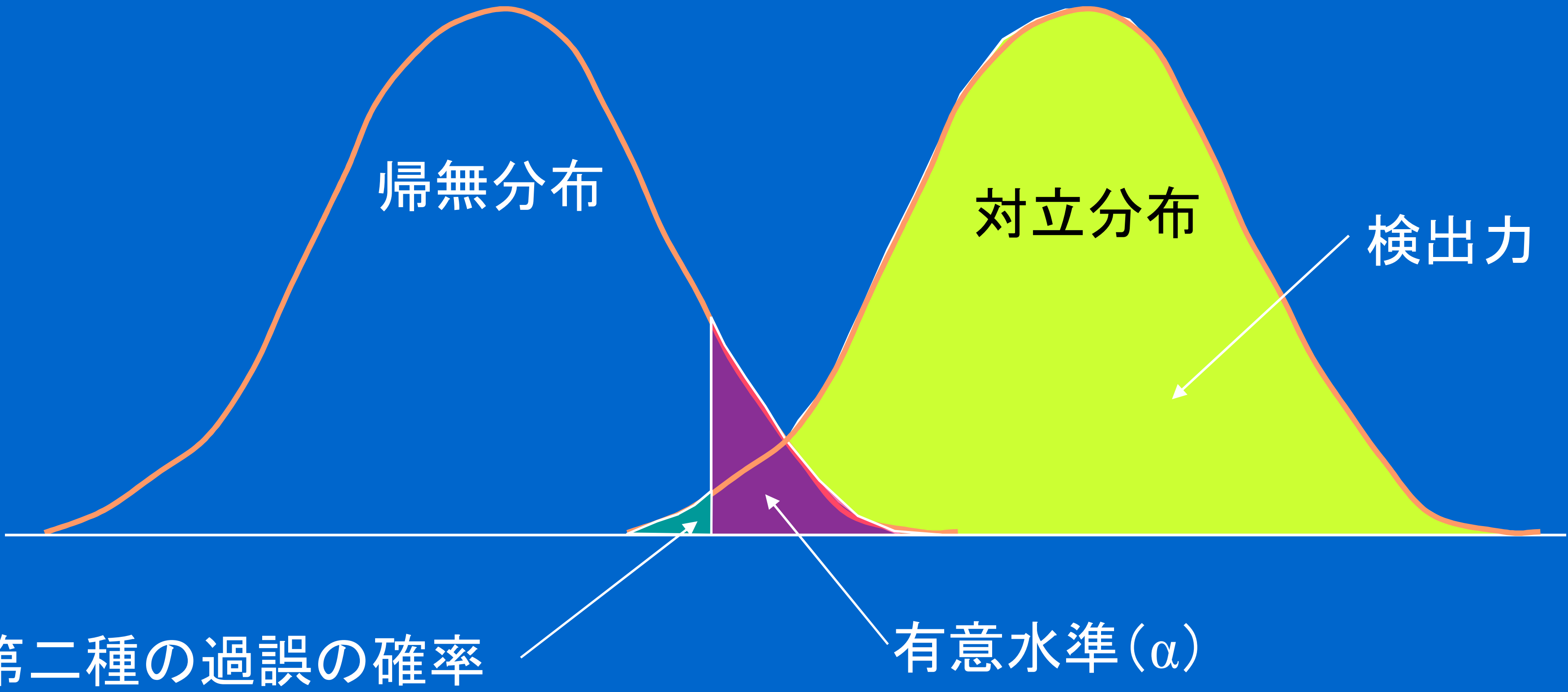
検定における正しい判定と誤り

（帰無）仮説を （帰無）仮説が	棄却しない	棄却する
正しいとき		
正しくないとき		

有意水準と検出力

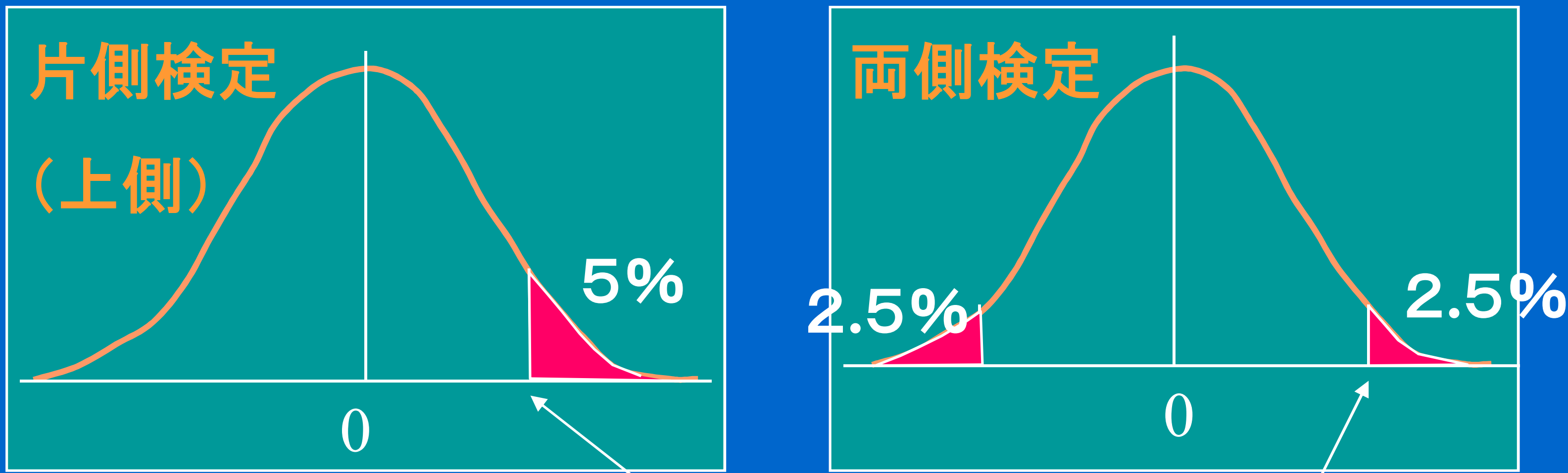
検出力＝1－第二種の過誤の確率

＝対立仮説が真のとき，帰無仮説を棄却する確率



片側検定と両側検定

α ＝ 5％　のとき



α ＝ 5％ のとき　u(α)＝1．645　u(α/2)＝1．96

α ＝ 1％ のとき　u(α)＝3．08　　u(α/2)＝2．58

母平均の検定

母分散(σ^2)が既知の場合

・・・　標準正規分布を利用

母分散(σ^2)が未知の場合

・・・　t 分布を利用

区間推定と同じ

【仮説】

$\mu = \mu_0$　であるという内容を検定するとき

①両側検定　$H_0 : \mu = \mu_0$　$H_1 : \mu \neq \mu_0$

②右片側検定　$H_0 : \mu = \mu_0$　$H_1 : \mu > \mu_0$

③左片側検定　$H_0 : \mu = \mu_0$　$H_1 : \mu < \mu_0$

母分散(σ^2)既知の場合

母集団の分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき,

大きさ n の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均 $\bar{x}$ の分布は

正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

すなわち, $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う.

*cf.*79-80

検定手順（母分散既知の場合）

（1）母集団 N :（μ, σ^2）を仮定する.

（2）帰無仮説 $\mu = \mu_0$ を設定する.

（3）危険率（有意水準）αのときの，$u_{(\alpha/2)}$を求める.

NORMSINV 関数

（4）$$u_0 = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}}$$ を計算する

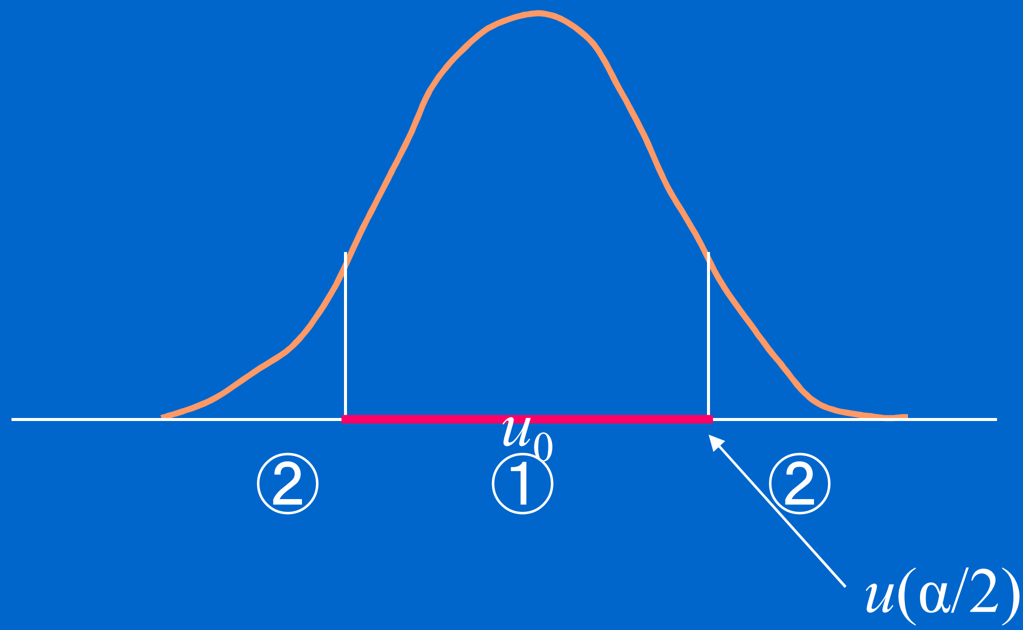
（5）$u_0 \leqq u_{(\alpha/2)}$ のとき　仮説を採択（accept）する

$u_0 > u_{(\alpha/2)}$ のとき　仮説を棄却（reject）する

仮説の採択･棄却の意味

① $u_0 \leqq u(\alpha/2)$ のとき　仮説を採択（accept）する

② $u_0 > u(\alpha/2)$ のとき　仮説を棄却（reject）する



例題（母分散が既知の場合）

内容量1kgの箱入り菓子10箱の正味量を測定したところ，
以下のような結果であった．
過去の経験から，母分散は14.01であることが分かっている．
内容量の表示が正しいかどうかを有意水準5%で検定せよ．

997　999　998　1002　998　1005　990　1000　1001　997

【解答例】

H_0 ：$\mu = 1000$　　$\alpha = 0.05$　　$n = 10$　　$\sigma^2 = 14.01$

$\overline{x} = (997 + \cdots + 997) / 10 = 998.7$

$u_0 = |998.7 - 1000| / (\sqrt{14.01 / 10}) \fallingdotseq 1.098$

標準正規分布表より　$u(\alpha/2) = 1.96$

$u_0 = 1.098 < 1.96 = u(\alpha/2)$

本来は左片側検定

$\therefore$ 仮説 H_0 ：$\mu = 1000$ は採択される．

即ち，内容量1kgの表示は間違っていない．//

例題（左片側検定の場合）

あるテニスクラブでは，部員が使用する用具をA社から一括して購入している．A社の製品は平均寿命は10.6ヶ月，標準偏差は2.1ヶ月である．

B社がA社より安い価格で売り込みをかけてきた．B社は，品質もA社に優るとも劣らないと主張している．そこで，B社の商品をテストするため30個を購入し使用してみたところ，平均寿命は9.4ヶ月であった．標準偏差はA社のそれと変わらないものとして，有意水準5%でB社の主張が正しいかどうかを検定せよ．

【解答例】

$H_0\ :\mu=\mu_0=10.6\quad (H_1:\mu=\mu_1<\mu_0)$

左片側検定

$\bar{x}=9.4\qquad \alpha=0.05\qquad n=30\qquad \sigma=2.1$

$u_0=|9.4-10.6|\ /\ (2.1\ /\ \sqrt{30})\fallingdotseq 3.13$

標準正規分布表より　$u(\alpha)=1.64$

$u_0=3.13\ >\ 1.64=u(\alpha)$

∴ 仮説 $H_0\ :\mu=10.6$ は棄却される．

即ち，B社の製品の品質はA社のそれと優るとも劣らないとはいえない．//

【母平均の区間推定】

$9.4-1.64\times(2.1\ /\ \sqrt{30})\ <\mu<\ 9.4+1.64\times(2.1\ /\ \sqrt{30})$

$8.7712<\mu<10.0288$ //

(10.6 は右側に外れている)

例題（右片側検定の場合）

担当したクラス（複数）の中からランダムに選んだ2クラスに対して，新しい講義方法を採用した．同一の試験問題によって実施した学年末試験における当該学年全体の平均は60.7，標準偏差は16.3であった．

新しい講義方法を採用したクラスの中からランダムに48人を選んだところ，その平均は65.4であった．新しい講義方法は有効であったかどうかを有意水準5%で検定せよ．

H_0は効果はなかったということ
H_1は効果はあったということ

【解答例】

$H_0 : \mu = \mu_0 = 60.7 \quad H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$

$\alpha = 0.05$　標準正規分布表より $u(\alpha) = 1.64$

$u_0 = |60.7 - 65.4| / (16.3 / \sqrt{48}) \fallingdotseq 1.997$

$u_0 \fallingdotseq 1.997 > 1.64 = u(\alpha)$

∴仮説は棄却される

【区間推定】

$60.7 - 1.64 \times (16.3 / \sqrt{48}) < \mu < 60.7 + 1.64 \times (16.3 / \sqrt{48})$

$58.771 < \mu < 64.558$ //

母平均の検定手順（母分散未知の場合）

（1）母集団：N(μ, σ^2) を仮定する.

（2）大きさ n の標本　および

偏差平方和（ε^2）（または標本分散，不偏分散）を得る.

（3）自由度$\varphi = n - 1$，危険率$(100\times\alpha)$% の $t(\alpha/2)$ を求める.

TINV 関数

（4）仮説：$\mu = \mu_0$ を立て，

危険率$(100\times\alpha)$% での母平均$\mu = \mu_0$ の棄却域

（分母の √ 内は S / （$n - 1$）または s / n でもよい）

（5）$t_0 \leqq t(\alpha/2)$　のとき　仮説を採択（accept）する

$t_0 > t(\alpha/2)$　のとき　仮説を棄却（reject）する

*cf.*80-81

例題（母分散が未知の場合）

ある時点でのA社の株価は5カ所の証券取引所で

841　837　843　843　839　(円)

であった.

株価によって示されるA社の真の実勢μについて,

$H_0 : \mu = 880$ （$H_1 : \mu \neq 880$） を有意水準1%で検定せよ.

【解答例】

$n = 5$ より $\varphi = 4$ 　　$\alpha = 0.01$

$\overline{x} = (841 + 837 + \cdots + 839) / 5 = 840.6$

$s^2 = \{ (841 - 840.6)^2 + \cdots + (839 - 840.6)^2 \} / 5 \fallingdotseq 5.44$

$t_0 = | 840.6 - 880 | / \sqrt{(5.44 / 4)} \fallingdotseq 33.79$

t 分布表より, $t(4, 0.005) = 4.604$

$t_0 \fallingdotseq 33.79 > 4.604$ したがって仮説は棄却される.

即ち, A社の株価880円は真の姿ではない.

区間推定を行う

母平均の差の検定（母分散既知）

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$　または　$\mu_1 - \mu_2 = 0$

①

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$

m 個の標本の平均 $\overline{x}$

②

$N(\mu_2, \sigma_2^2)$

n 個の標本の平均 $\overline{y}$

母分散σ_1^2，σ_2^2は 共に未知だが $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ と仮定できる場合

①

N (μ_1 , σ^2)

m 個の標本の平均$\overline{x}$ ，　偏差平方和Sx

②

N (μ_2 , σ^2)

n 個の標本の平均$\overline{y}$

偏差平方和Sy

母分散は共に未知で $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ と考えられる場合

帰無仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ （$\mu_1 - \mu_2 = 0$）は

Ux^2, Uy^2 はそれぞれ不偏分散

成り立つとき危険率αで帰無仮説は採択される.
成り立たないとき危険率αで帰無仮説は棄却される.

対になったデータの平均の差の検定

（1）差の母集団：N $(\mu,\ \sigma^2)$を仮定する.

（2）帰無仮説 H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = d$ を立てる.

（3）大きさ n の標本の差の平均 $\overline{x}$ および 偏差平方和ε^2を計算する.

（4） t 分布表より，危険率α，自由度$\varphi = n - 1$ に対する $t(\alpha/2)$ を得る.

（5）

成り立つとき，帰無仮説を採択する.

成り立たないとき，帰無仮説を棄却する.

cf. *p*.101

母分散の検定の手順

（1）帰無仮説　$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

（対立仮説 H_1 としては,

$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\sigma^2 < \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ の3通りが考えられる）

（2）危険率αの設定

（3）χ_0^2 =

s^2 は標本分散

ε^2 は偏差平方和

（4）χ^2分布表より, $\chi_\varphi^2(\alpha/2)$, $\chi_\varphi^2(1-\alpha/2)$ を求める.

（5）$\chi_\varphi^2(\alpha/2) \leqq \chi_0^2 \leqq \chi_\varphi^2(1-\alpha/2)$ のとき仮説を採択

$\chi_0^2 < \chi_\varphi^2(\alpha/2)$ 又は$\chi_0^2 > \chi_\varphi^2(1-\alpha/2)$

のとき仮説を棄却

例題

従来の材料で製造していた部品の強度は，標準偏差5(kg)のバラツキであることが知られている．　新しい材料を使用して部品を試作したところ，その強度は，25.7　23.5　26.2　28.8　25.4　22.4 (kg) を示した．

バラツキはこれまでと差があると考えられるか．5 % の危険率で検定せよ．

【解答例】

帰無仮説：新しい材料の標準偏差をσとするとσ＝5　(α＝0.05)

$\bar{x} = (25.7 + \cdots + 22.4) / 6 \fallingdotseq 25.3$

$\chi_0^2 = \Sigma(x - 25.3)^2 / 5^2 = 0.99$

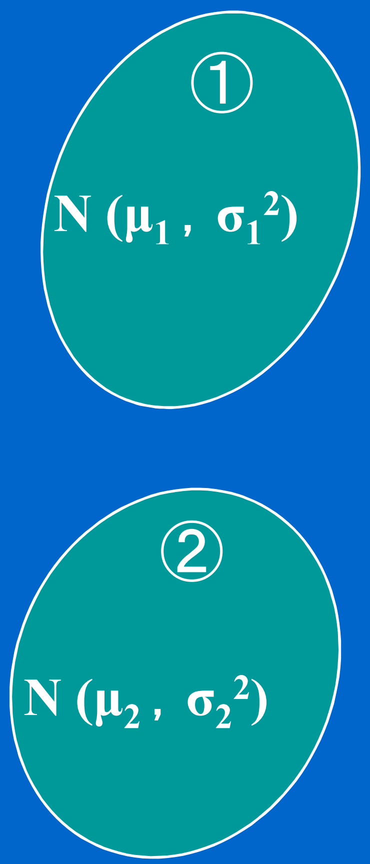
$\varphi = 6 - 1 = 5$

χ^2 分布表より，$\chi^2(5,\ 0.025) = 12.83$　　$\chi^2(5,\ 0.975) = 0.831$

$0.831 < \chi_0^2 = 0.99 < 12.83$　だから　仮説は棄却されない

即ち、バラツキはこれまでと差があるといえない．//

等分散の検定（$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$）



$\sigma_1^2 \ / \ \sigma_2^2 = 1$

この検定では

帰無仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の

対立仮説 H_1 として

(1) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

(3) $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

の3通りが考えられる.

等分散検定の手順

（1）帰無仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

（2）危険率αの設定

（3）

$F_0 =$

（4）F分布表より，$F_1 = F(n_1, n_2, \alpha/2)$ と

$F_2 = F(n_1, n_2, 1-\alpha/2)$

または　$F_2 = 1 / F(n_1, n_2, \alpha/2)$　を求める

（5）$F_1 < F_0 < F_2$　ならば仮説を採択する.

$F_0 \leqq F_1$　または　$F_0 \geqq F_2$　ならば仮説を棄却する.

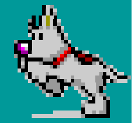
適合度検定(fitness test)

得られた標本値より，母集団分布が想定している分布(理論的分布)に従っているかどうかを調べる.

このとき，Zは自由度(n－1)のχ^2分布に従う.

数式化

級	1	2	・・	n
観測値(x)	x_1	x_2	・・	x_n
理論値(y)	y_1	y_2	・・	y_n



例題－１。 サイコロを60回投げたところ、以下のような結果を得た。
このサイコロは公平なサイコロといえるかどうかを5％の有意水準で調べよ。

［帰無仮説］ H_0：サイコロの目の出方は公平である。

サイコロの目	1	2	3	4	5	6	計
観測値(x)	3	13	10	7	16	11	60
理論値(y)	10	10	10	10	10	10	60
x−y	−7	3	0	−3	6	1	0
(x−y)^2	49	9	0	9	36	1	104
(x−y)^2/y	4.9	0.9	0	0.9	3.6	0.1	10.4

＝ Z

$Z = 10.4 < 11.071 = \chi^2(5, 0.05)$

∴サイコロは公平である（いかさまではない）。

分割表 (contingency table)ー独立性の検定

２つの属性が独立なものかどうかを調べる

→ ２つの属性の関連性は相関・回帰分析

n個の標本値について，

縦に属性Aをr個，横に属性Bをs個の級に分ける.

事象$\{A_i \cap B_j\}$に属する標本数をn_{ij}とする（$i=1,2,\cdots,r \quad j=1,2,\cdots,s$）.

このとき，n_{ij}に対する期待度数E_{ij}は，$E_{ij}=n(n_{i\cdot}/n)(n_{\cdot j}/n)=(n_{i\cdot}\times n_{\cdot j})/n$

これを適合度に適用すると，

このとき，Zは自由度$(r-1)(s-1)$のχ^2分布に従う.

数式化（観測値）

	B_1	B_2	・・	B_s	計
A_1	n_{11}	n_{12}	・・	n_{1s}	$T_{1\cdot}$
・					
A_i	n_{i1}	n_{i2}	・・	n_{is}	$T_{i\cdot}$
・					
A_r	n_{r1}	n_{r2}	・・	n_{rs}	$T_{r\cdot}$
計	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	・・	$T_{\cdot s}$	T

数式化(理論値)

	B_1	B_2	・・	B_s	計
A_1					$T_{1\cdot}$
・					
A_i					$T_{i\cdot}$
・					
A_r					$T_{r\cdot}$
計	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	・・	$T_{\cdot s}$	T

例題。或地域の男女別の内閣支持者数は表の通りである。

この地域は男女別で内閣支持率に差があるかどうかを5%の有意水準で調べよ。

［帰無仮説］ H_0：内閣支持率に関して男女の差はない。

［観測値］

	男性	女性	計
支持する	460	485	945
支持しない	663	943	1606
計	1123	1428	2551

分散分析（ANOVA）

母平均の差に関して

母集団が2つの場合は，母平均の差の検定を利用する.

即ち，$\mu_1 = \mu_2$ の検定

母集団が3つ以上の場合は，

$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$ の検定

即ち，$\mu_i = \mu_j$ の検定を $(n^2 - n) / 2$ 組行わねばならない.

⇒ **分散分析**が利用される.

平均値間の一様性の検定

観測データがいくつかの要因の総合的な影響によると考えられる場合，これらの諸要因の効果を区分・分類し，各要因の個別効果や，複合効果を測定するために，分散分析法（実験計画法の一種）が利用される.

分散分析（ANOVA）

◎ 分散分析の種類

① 一元配置法（繰り返し数が等しい場合）one-way layout

② 一元配置法（繰り返し数が等しくない場合）

③ 二元配置法（繰り返しのない場合） two-way layout

④ 二元配置法（繰り返しのある場合）

⑤ 三元配置法 three-way layout

⑥ ラテン方格法 Latin square

一元配置法（繰り返し数が等しい場合）

因子(factor)：

実験の目的として特に取り上げた要素

水準(level)：

因子を構成する種類

各グループの母分散は未知だが同一であると仮定し，
母平均はグループ間に差がある，として分析する．

データ構成

全体の偏差平方和＝ 級間の偏差平方和 ＋ 級内の偏差平方和

因子 : A　　水準 : a　　繰返し : n

これらは，それぞれ自由度$an-1$，$a-1$，$a(n-1)$のχ^2分布に従う

$\Sigma(y_{ij}-\bar{y})^2$

全体の偏差平方和

$\Sigma n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2$

級間の偏差平方和

$\Sigma(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$

級内の偏差平方和

						平均 / 計 (A)	計^2 (A)^2
	1	・・・	j	・・・	n		
A_1	y_{11}	・・・	y_{1j}	・・・	y_{1n}	$(\bar{y}_1)$ (A_1)	$(A_1)^2$
・	・	データ	・		・	・・	・
A_i	y_{i1}	・・・	y_{ij}	・・・	y_{in}	$(\bar{y}_i)$ (A_i)	$(A_i)^2$
・	・		・		・	・・	・
A_a	y_{a1}	・・・	y_{aj}	・・・	y_{an}	$(\bar{y}_a)$ (A_a)	$(A_a)^2$
						$\bar{y}$ T	$\Sigma(A)^2$

$Y_{ij}=(y_{ij}-y_0)\,h_0$ という変換も可能

平方和･自由度の計算

$CF = T^2 / an$ （修正項）

$S_T = y_{11}{}^2 + \cdots + y_{ij}{}^2 + \cdots + y_{an}{}^2 - CF$

$S_A = \{ (A_1)^2 + \cdots + (A_a)^2 \} / n - CF$

$\quad = \Sigma(A)^2 / n - CF$

$S_e = S_T - S_A$

$\Phi_T = an - 1$

$\Phi_A = a - 1$

$\Phi_e = a(n-1) = \Phi_T - \Phi_A$

分散分析表

仮説：それぞれのグループの母平均は等しい

要因	S	Φ	V	F_0	E(V)
A	S_A	Φ_A	V_A	$\dfrac{V_A}{Ve}$	$\sigma_e^2 + 4\sigma A^2$
e	Se	Φe	Ve		σ_e^2
T	S_T	Φ_T	V_T		

ただし　$V_A \geqq Ve$

$F_0 \geqq F(\alpha, \varphi_A, \varphi e)$　ならば仮説を棄却する

$F_0 < F(\alpha, \varphi_A, \varphi e)$　ならば仮説を採択する

級間変動・級内変動

因子 : A　　水準 : a　　繰返し : n

	1	⋯	j	⋯	n	平均($\bar{y}$)
A_1	y_{11}	⋯	y_{1i}	⋯	y_{1n}	$(\bar{y}_1)$
・	・		・		・	・
A_i	y_{i1}	⋯	y_{ij}	⋯	y_{in}	$(\bar{y}_i)$
・	・		・		・	・
A_a	y_{a1}	⋯	y_{aj}	⋯	y_{an}	$(\bar{y}_a)$
						$\bar{\bar{y}}$

$(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$

級内変動

級間変動

$(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2$

分散分析：一元配置

概要

グループ	標本数	合計	平均	分散
行 1	4	16	4	28.66666667
行 2	4	19	4.75	8.916666667
行 3	4	0	-2.2E-16	31.33333333
行 4	4	-29	-7.25	23.58333333

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	362.25	3	120.75	**5.221621622**	0.015468	**3.49029**
グループ内	277.5	12	23.125			
合計	639.75	15				

F (5% , 3 , 12)

例題

ある部品を加工する機械 A_1, A_2, A_3 がある.
各機械による加工時間は以下の通りであった.
機械の違いが加工時間に影響を与えていると考えれるか.

A_1	A_2	A_3
28	27	24
30	29	25
30	30	28
29	27	24
28	26	24

例題（仮説：機械間に差はない）

A_1	A_2	A_3
1	0	−3
3	2	−2
3	3	1
2	0	−3
1	−1	−3

$CF = 4^2 / 5 \times 3 = 1.07$

$S_T = 1^2 + 3^2 + \cdots + (-3)^2 - 1.07$

$\quad = 68.93$

$S_A = 216 / 5 - 1.07$

$\quad = 42.13$

$S_e = 68.93 - 42.13$

$\quad = 26.80$

$\varphi_A = 3 - 1 = 2$

$\varphi_e = 3(5-1) = 12$

例題

$S_T = 68.93$

$S_A = 42.13$

$S_e = 26.80$

$\varphi_A = 2$

$\varphi_e = 12$

F(0.05 , 2 , 12)

分散分析表

要因	変動(S)	自由度(φ)	不偏分散(V)	F_0	F
A	42.13	2	21.07	9.45^{**}	$3.89^{(5\%)}$
e	26.80	12	2.23		$6.93^{(1\%)}$
T	68.93	14			

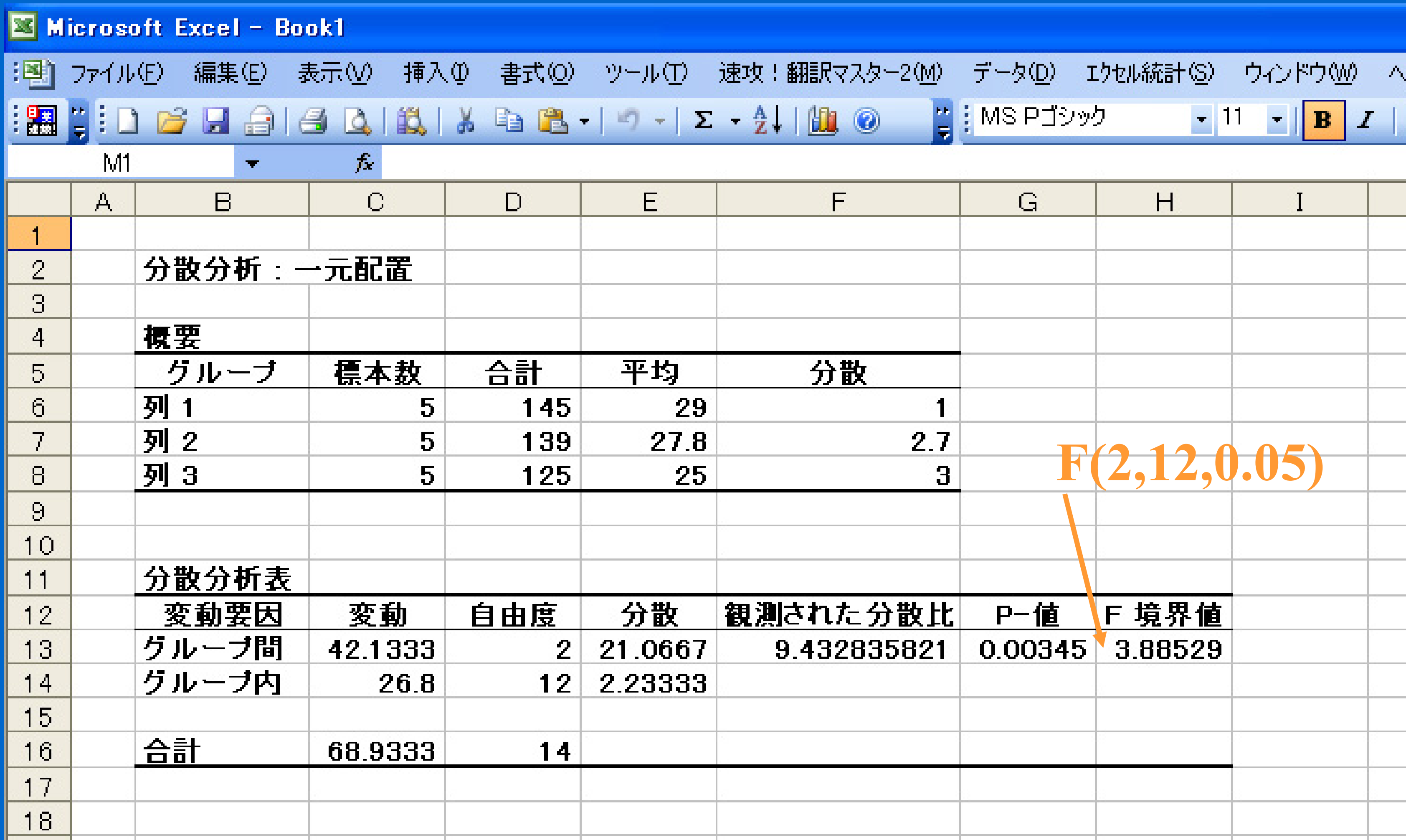
5%で有意＊　1%で有意＊＊

$$\frac{21.07}{2.23}$$

仮説は棄却される.

すなわち，機械の間に差が認められる.//

Excel の分析ツール



分散分析：一元配置

概要

グループ	標本数	合計	平均	分散
列 1	5	145	29	1
列 2	5	139	27.8	2.7
列 3	5	125	25	3

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	42.1333	2	21.0667	9.432835821	0.00345	3.88529
グループ内	26.8	12	2.23333			
合計	68.9333	14				

F(2,12,0.05)

二元配置法（繰返しのないとき）

二元配置法（繰返しのない場合）の例

因子：A, B

水準：A→4, B→3

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2.0	1.2	1.7
A_2	2.6	1.6	2.5
A_3	3.0	1.7	2.3
A_4	3.2	2.3	2.7

二元配置法（繰返しのないとき）

$Y = (y - 2.0) \times 10$

B \ A	B_1	B_2	B_3	(A)	$(A)^2$
A_1	0	−8	−3	−11	121
A_2	6	−4	5	7	49
A_3	10	−3	3	10	100
A_4	12	3	7	22	484
(B)	28	−12	12	28	754
$(B)^2$	784	144	144	1072	784

CF=	65.3		
S_T=	404.7	ϕ_T=	11
S_A=	186.0	ϕ_A=	3
S_B=	202.7	ϕ_B=	2
S_e=	16.0	ϕ_e=	6

分析ツール

分散分析：繰り返しのない二元配置

概要	標本数	合計	平均	分散
行 1	3	-11	-3.66667	16.33333
行 2	3	7	2.333333	30.33333
行 3	3	10	3.333333	42.33333
行 4	3	22	7.333333	20.33333
列 1	4	28	7	28
列 2	4	-12	-3	20.66667
列 3	4	12	3	18.66667

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	測された分散	P-値	F 境界値
行	186	3	62	23.25	0.001054	4.757063
列	202.6667	2	101.3333	38	0.000392	5.143253
誤差	16	6	2.666667			
合計	404.6667	11				

ラテン方格 (Latin square)

たとえば，A，B，C，D，4つの原材料の差を，機械および作業員による不均一性の影響を除いて判定するとき，まず，交絡をなくすために，各原材料が各機械，各作業員に行き渡るように実験計画しなければならない．

ラテン方格を利用する場合，機械の数と従業員の数が調べようとする原材料の種類と同数でなければならない．

全変動(S)

＝列間変動(Sc)＋行間変動(Sr)＋処理間変動(St)＋残差(誤差)変動(S*e*)

数式化

$n \times n$ のラテン方格の場合

$CF = T^2 / n^2$

$S = \Sigma\Sigma(x_{ij})^2 - CF$

$Sc = \Sigma(T_{\cdot j})^2 / n - CF$

$Sr = \Sigma(T_{i\cdot})^2 / n - CF$

$St = \Sigma(Tt)^2 / n - CF$

$Se = S - Sc - Sr - St$

$\Phi s = n^2 - 1$

$\Phi r = n - 1$

$\Phi t = n - 1$

$\Phi e = (n-1)(n-2)$

A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分	分散比
列間(c)	Sc	$n-1$	$Vc = Sc / (n-1)$	Vc / Ve
行間(r)	Sr	$n-1$	$Vr = Sr / (n-1)$	Vr / Ve
処理間(r)	St	$n-1$	$Vt = St / (n-1)$	Vt / Ve
残差(e)	Se	$(n-1)(n-2)$	$Ve = Se / (n-1)(n-2)$	
全体	S	n^2-1		

例題

ある新商品の広告宣伝に関して，表のように3つずつの条件の組み合わせで9地域にそれぞれ3種の方法A(新聞)，B(テレビ)，C(タウン誌)で宣伝し，1ヶ月後に認識度を調べたところ，表のような認識度のパーセントを得た．

認識度に対して，この3種の宣伝方法に差があると認められるか．

５%で調べよ．

	農村	近郊	都市部
北海道	30 (A)	38 (C)	36 (B)
関東	36 (B)	36 (A)	40 (C)
九州	42 (C)	41 (B)	40 (A)

解答例

A	C	B
B	A	C
C	B	A

			$(x_{ij}-37)$の変換			T	T^2
30	38	36	−7	1	−1	−7	49
36	36	40	−1	−1	3	1	1
42	41	40	5	4	3	12	144
			−3	4	5	6	194
			9	16	25	50	

$T_A = (-7) + (-1) + 3 = -5$

$T_B = (-1) + 4 + (-1) = 2$

$T_C = 5 + 1 + 3 = 9$

$CF = 6^2 / 3^2 = 4$

$S = 112 - 4 = 108$

$Sc = 50 / 3 - 4 = 12.67$

$Sr = 194 / 3 - 4 = 60.67$

$St = \{(-5)^2 + 2^2 + 9^2\} / 3 - 4 = 32.67$

$Se = 108 - 12.76 - 60.67 - 32.67 = 1.99$

分散分析表

要因	S	φ	V	F_0	F
列間	12.67	2	6.33	6.39＜19.0	
行間	60.67	2	30.3	30.6＞19.0	
処理	32.67	2	16.3	16.5＜19.0	
残差	1.99	2	0.99		
全体	108	8			

行間に差が認められる

回帰分析 (regression analysis)

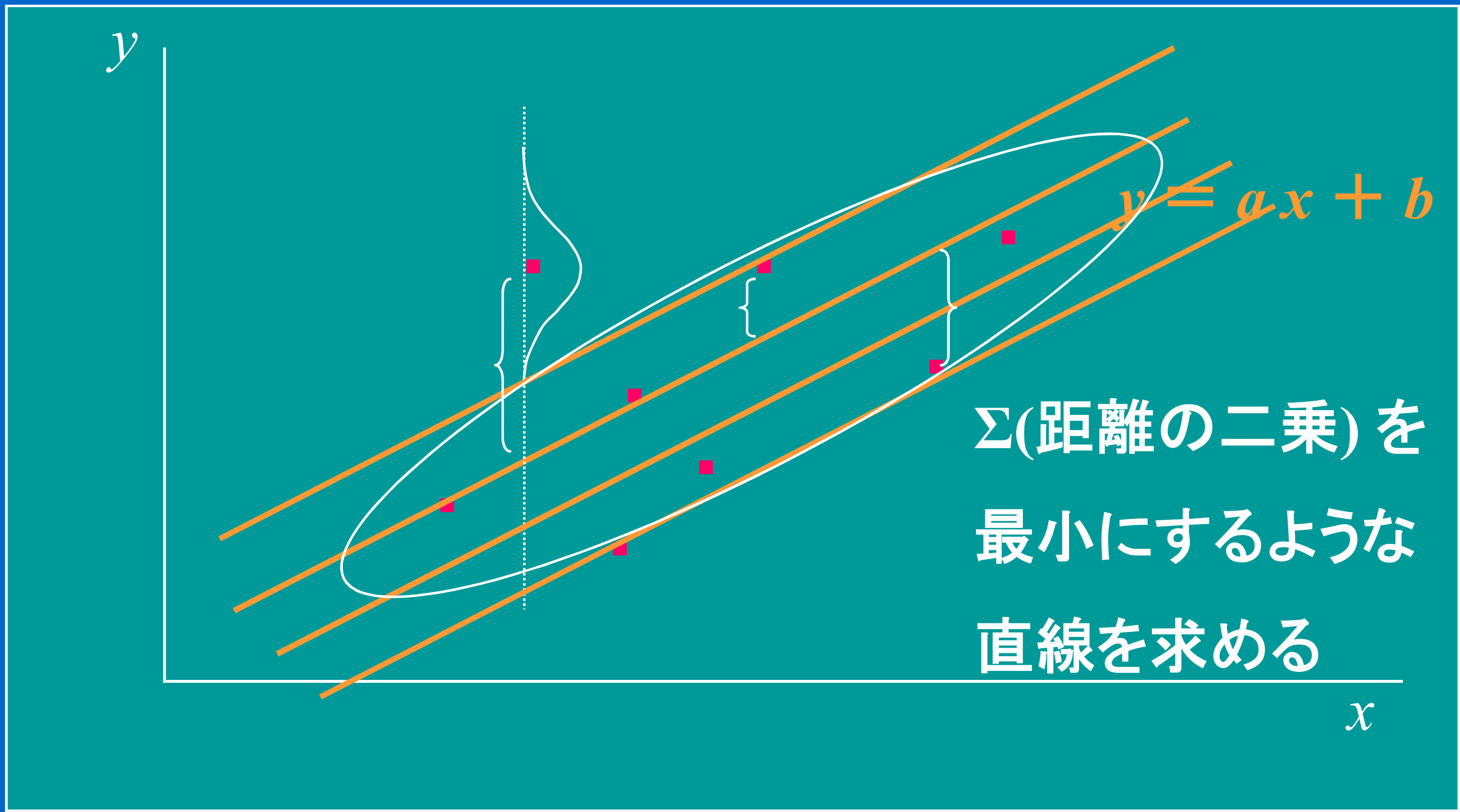
n組の原因となる数値(複数個でもよい)と結果の数値から，両者の関係を示す直線あるいは曲線を求める．

独立変数(説明変数) ‥‥‥ 原因となる数値
従属変数(被説明変数，応答変数，目的変数) ‥‥ 結果となる数値

単回帰 ‥‥ 独立変数が1つ $y = ax + b$
重回帰 ‥‥ 独立変数が2つ以上 $y = ax_1 + bx_2 + c$

回帰直線 ‥‥ 回帰分析により求める直線 $y = ax + b$
回帰曲線 ‥‥ 回帰分析により求める曲線 $y = ax^2 + bx + c$

最小二乗法 (method of least squares)



最小二乗法による直線回帰

従属変数(y)	独立変数(x)	(x^2)	($x\,y$)
y_1	x_1	$x_1{}^2$	$x_1\,y_1$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
y_i	x_i	$x_i{}^2$	$x_i\,y_i$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
y_n	x_n	$x_n{}^2$	$x_n\,y_n$
Σy_i	Σx_i	$\Sigma x_i{}^2$	$\Sigma x_i y_i$

から, $y = a\,x + b$ の a , b を求める.

$$\begin{cases} a\Sigma x_i + nb = \Sigma y_i \\ a\Sigma x_i{}^2 + b\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i \end{cases}$$

（正規方程式）

$$a = \frac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i\,\Sigma y_i}{n}}{\Sigma x_i{}^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}}$$

$$b = \overline{y} - a\,\overline{x}$$

a を求めるための別法

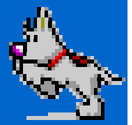
従属変数(y)	独立変数(x)
y_1	x_1
・	・
y_i	x_i
・	・
y_n	x_n
Σy_i	Σx_i

から, $y = ax + b$ の a , b を求める.

$$\begin{cases} a\Sigma x_i + b = \Sigma y_i \\ a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i \end{cases}$$

（正規方程式）

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$



例題

西暦	平均気温(x)	収穫量(y)	(x^2)	($x\,y$)
1990	25	30	625	750
1991	29	35	841	1015
1992	35	40	1225	1400
1993	20	28	400	560
1994	36	42	1296	1512
合計	145 Σx	175 Σy	4387 Σx^2	5237 Σxy
平均	29	35		

求める回帰直線は

$y = 0.89\,x + 9.19$ //

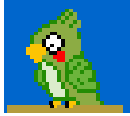
平均気温が27度のときの予想収穫量は,

$x = 27$ より

$y = 33.13$ //

$$a = \frac{5237 - \dfrac{145 \times 175}{5}}{4387 - \dfrac{145^2}{5}} \fallingdotseq 0.89$$

$$b = 35 - 0.89 \times 29 = 9.19$$



分析ツール

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	重相関 R	0.987071							
5	重決定 R2	0.974309							
6	補正 R2	0.965746							
7	標準誤差	1.125788							
8	観測数	5							
9									
10	分散分析表								
11		自由度	変動	分散	測された分散	有意 F			
12	回帰	1	144.1978	144.1978	113.7746	0.001761			
13	残差	3	3.802198	1.267399					
14	合計	4	148						
15									
16		係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
17	切片	9.186813	2.471837	3.716593	0.033887	1.320324	17.0533	1.320324	17.0533
18	X 値 1	0.89011	0.083449	10.66652	0.001761	0.624538	1.155682	0.624538	1.155682
19									

例題 - 2

学生	英語(x)	数学(y)
1	40	50
2	40	30
3	60	50
4	60	70
5	80	70
6	80	90

回帰係数の検定（回帰式の有効性）

$\hat{y}_i$ は回帰式 $\hat{y}=ax+b$ の x に x_i を代入したときの
y の予測値 ax_i+b を表す．

手順

①自由度 ($\varphi=n-2$) を求める

③ t 分布表より，自由度φ，有意水準α/2 の点 $t(\varphi,\alpha/2)$ を知る

④ $|t_0| \geqq t(\varphi/2)$ のとき，

母回帰係数 $a=0$ という帰無仮説は棄却される．

すなわち，求めた回帰式は予測に役立つ．

$|t_0| < t(\varphi/2)$ のとき，帰無仮説は棄却されない．

すなわち，求めた回帰式は予測に役立たない．

例題

平均気温と収穫量の問題で

$a = 0.89$, $b = 9.19$ であった.

回帰係数の検定を5%の有意水準で行え.

$\hat{y}_i = 0.89x_i + 9.19$ (回帰直線)

例題の解答例

平均気温(x)	収穫量(y)
25	30
29	35
35	40
20	28
36	42

自由度φ

$=5-2=3$

$\Sigma(x_i-\bar{x})^2$

$=182$

$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2$

$=3.8022$

$\fallingdotseq 10.67$

$t\,(3,\ 0.025) = 3.182$　　$t_0 = 10.67 > 3.182$

∴ 回帰式は予測に役立つ

すなわち，平均気温から収穫量の予測が可能 //

決定係数

回帰直線のあてはまりの良さを表す指標

$0 \leqq R^2 \leqq 1$

【例題】 平均気温と収穫量の場合

$R^2 = 144.1622 / 148$

$\fallingdotseq 0.974$

∴ 回帰直線によるあてはまりが極めて良い//

分析ツール

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	重相関 R	0.987071							
5	重決定 R2	0.974309							
6	補正 R2	0.965746							
7	標準誤差	1.125788							
8	観測数	5							
9									
10	分散分析表								
11		自由度	変動	分散	測された分散	有意 F			
12	回帰	1	144.1978	144.1978	113.7746	0.001761			
13	残差	3	3.802198	1.267399					
14	合計	4	148						
15									
16		係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
17	切片	9.186813	2.471837	3.716593	0.033887	1.320324	17.0533	1.320324	17.0533
18	X 値 1	0.89011	0.083449	10.66652	0.001761	0.624538	1.155682	0.624538	1.155682
19									