新経済数学入門

—基礎演習と不完全競争—

丹野 忠晋

はじめに

この本の原稿は，拙著『経済数学入門ー初歩から一歩ずつー』の理解を助ける基礎演習問題とその応用として有益な経済学的なトピックスを取り上げています．紙幅の都合上省略した説明も含めて分かりやすい補助教材になるよう工夫を凝らしてあります．

おかげさまで拙著『一歩ずつ』は好評を持って迎えられました．しかし，自分が教科書として使っていて，あるいは他の方の声からいくつかの改善点が出てきました．

第 1 に講義を受ける学生の基礎数学や経済数学の演習のための時間や演習問題が不足していることです．そのため，難しい経済数学に入ると少なくない学生が基礎的な計算でつまずいています．そして，ある程度の高みに登ってから自分の弱点を補強したり，基礎事項を確認する必要性が第 2 点です．

基礎的な勉強をしているときには分かった積もりでいても，いざそれを自在に操ってさらに上を目指すときに自分の基礎の怪しさを実感することがあります．そのようなことのないよう基礎的なことを習熟すべきです．しかし，現状そうなってしまっていたらどうするのか？できれば経済学の概念や高度な数学の理解に集中して勉強できる態勢にするにはどうすべきかという問いにこの本の原稿は応えます．

まずは基礎的な練習の部分です．学生は実際に問題を解くことによって理解が深まると感じています．そのため問いや例のただ数値を変えた問題を数多く含めました．独学で知識を確認することができます．また，教師にとって確認テストの教材として使うことができます．

次に経済学のパートでは微分を中心に拙著で取り上げた例題や問いを詳しく解説しています．さらに経済厚生や不完全競争について触れています.「ミクロ経済学」の不完全競争パートや「産業組織論」や「公共経済学」の理論の基礎として利用できる資料を目指しました．

読者が直ぐに解答を見られないように問題は右ページに収めています．解答後にページをめくると解答と解説があります．解答は正答だけでなく，問題に出てくる定義やヒントや躓きの石についてのコメントを付けてあります．普通の問題集では，定義と解答は別々になっています．ここではそれを一緒くたにしています．もし解答者が誤っていれば—それが簡単なものであっても—その定義や計算方法に気づき記憶に残るでしょう．それによって自分の勘違いが分かり正しい答えや問題となっている計算が正しく理解できるように配慮しています．

教員は右ページをコピーして学生に演習として解かせることができます．さらに，学生が解答した後や宿題を提出した後に本テキストの解答のコピーを配付することができます．それによって，基礎的な知識を確認するための時間を節約したり，学生に基礎概念を効率的に確認することができます．

国立情報学研究所の新井紀子先生が 2018 年に話題になった著書『AI vs. 教科書が読めない子どもたち』(東洋経済新報社) において子供の読

解力の低さを指摘しました．教員として学生を見ていてうなずけるところが多いのです．本書の演習によって学生が自分の読めなさ加減を理解して，きちんと教科書を読むようになればと考えました．数学や経済数学では数式で表現するのは当たり前ですが，できるだけこなれた日本語の解説を付けて理解に努めています．

文部科学省に設置された中央教育審議会から平成 14 年に「大学の質の保証に係る新たなシステムの構築について」とい答申が出ました．大学は，さらに学生の学習成果に対して客観的に評価が可能な尺度を求められることになるでしょう．高校数学の内容が不確かな学生にどのように経済数学を教えて，その成果を測るのかはとても重要な教育課題です．本書は，基本的な計算方法を復習あるいは学び，それを応用して経済学や身の回りの経済現象を数理的に把握するための最低限の知識が習得できます．問題演習を行うことにより定量的に理解度を測り，解答後の勉強指針により基礎を固めることができます．

本書の問題を解くことによって学生は，自己採点によって上に挙げた技能を向上することができるようになっています．このような活動によって経済数学的な知識と技能が質的に向上することを願っています．

平成 31 年 2 月 14 日

丹野忠晋

目 次

1　数と計算

　基本的な数の性質や分数，小数，平方根，絶対値，指数の演習を通じて基礎力を確かめます．これらを良く理解して実際の計算を正確に行われるよう習熟してください．

問題

問い 1　割り算を整数の範囲で考えて,123 を 5 で割った商と余りを求めてください．また，商と余りの等式で表現してみてください．

問い 2　12 の因数を述べてください．

問い 3　次の数は素数でしょうか？(1) 31　(2) 91

問い 4　素因数分解してください．(1) 60　(2) 312

問い 5　次の計算を行ってください．(1) $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$　(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

問い 6　次の計算を行ってください．(1) $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$　(2) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$

問い 7　次の計算をしてください．(1) 0.3/6　(2) 2/0.2　(3) $0.39\div 0.03$

問い 8　2 の平方根を求めてください．

問い 9　「$\sqrt{(-3)^2}=-3$」は正しくないことを示してください．

問い 10　次の計算をしてください．　(1)　$\sqrt{9}$　(2)　$\sqrt{36}$

問い 11　次を計算して下さい．$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

問い 12　次の分母を有理化して下さい．$\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

問い 13　次の数の絶対値を求めてください．(1) $|3|$　(2) $|0|$　(3) $|-3|$

問い 14　次の計算をしてください．(1) 3^3　(2) $3^3\cdot 3^2$　(3) $(3^3)^2$

解答

1.1 数と数式

割り算は基本的な演算です

解答 1 割り算は，被除数 $\div$ 除数という演算です．被除数 $=$ 商 $\times$ 除数 $+$ 余りの関係があります．ただし，余りは除数よりも小さい数 0 以上の数です．

問題の答えは，商は 24，余りは 3 です．そして，$123 = 5 \times 24 + 3$ となります．

因数は因数分解でも使われる言葉ですね

解答 2 ある数の因数は，その数をちょうど割り切る数です．つまり，その数を因数で割ると余りは 0 となります．

問題の答えは，$1, 2, 3, 4, 6, 12$ となります．

言い換えると素数はその因数が 1 と自分自身のみである数です

解答 3 素数は，2 以上の自然数で 1 と自分自身以外では割り切ることのできない数です．

(1) 31 は素数です．　(2) 91 は 7×13 と表わされるので，素数ではありません．

解答 4 (1) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$　(2) $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$

1.2 有理数と計算

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

解答 5 分数の足し算や引き算は，分数の分母を等しくさせる通分を行ってから，その分子の計算をします．

$$(1)\quad \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15} \qquad (2)\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{a}{b} \times \frac{b}{d} = \frac{a}{d}$　(b に斜線し 1)

解答 6 分数の掛け算は，分子同士と分母同士を掛けて計算して新たな分数とします．分数の割り算は，除数 (割る方の分数) の分子と分母をひっくり返して，被除数 (割られる方の分数) との積を求めます．また，分数の答えは既約分数にすると良いでしょう．既約分数とはもうこれ以上約分できない分数を意味します．

$$(1)\quad \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{4 \times 5} = \frac{1 \times 1}{2 \times 5} = \frac{1}{20} \qquad (2)\quad \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{1 \times 3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

解答 7 小数が入った分数は，小数を分数に直してから計算すると上手くいきます．

$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$
$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$
$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

$$(1)\quad 0.3/6 = \frac{0.3}{6} = \frac{\frac{3}{10}}{6} = \frac{3}{10\times 6} = \frac{1}{20}$$
$$(2)\quad 2/0.2 = \frac{2}{\frac{2}{10}} = \frac{2\times 10}{2} = 10$$
$$(3)\quad 0.39 \div 0.03 = \frac{0.39}{0.03} = \frac{\frac{39}{100}}{\frac{3}{100}} = \frac{39}{3} = 13$$

1.3　実数と指数法則

$a>0$ の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$

0 の平方根は $\sqrt{0}=0$ のみ

解答 8 ある数の**平方根**は，2 乗するとその数に等しくなる数です．2 乗することを**平方する**といいます．ある正の数には平方根は 2 つあります．符号が正の方を**正の平方根**といい，また符号が負の方を**負の平方根**といいます．**根号** $\sqrt{\ }$ を用いて，正数 a の正の平方根を $\sqrt{a}$ と表わします．
　答えは $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ です．

$\sqrt{a^2} = a\ (a \geq 0)$
$\quad = -a\ (a<0)$

解答 9 正しい答えは $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ です．

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}\quad (a,b>0)$

解答 10 (1) $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
(2) $\sqrt{36} = \sqrt{4\times 9} = \sqrt{4}\times\sqrt{9} = \sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2} = 2\times 3 = 6$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (a,b>0)$

解答 11 $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{a}{b} = \frac{a\times c}{b\times c}\quad (c\neq 0)$

解答 12 分母に根号が含まれない式に直すことを**分母の有理化**といいます．
$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{2\times\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

解答 13 ある数の**絶対値**とはその数の原点からの距離を意味します．計算としてはプラスやゼロはそのままで，マイナスはマイナスの符号を「取って」やれば良いでしょう．答えは
(1) $|3| = 3$　(2) $|0| = 0$　(3) $|-3| = 3$

問い 9 は絶対値を用いて $\sqrt{a^2} = |a|$ と表現することも可能です

底^{指数}
$a^m a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$

解答 14 同じ数を掛けた回数**指数**といいます．2 回かけることを**平方**，3 回かけることを**立方**と呼びます． 答えは
(1) $3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$　(2) $3^3\cdot 3^2 = 3^5 = 243$
(3) $(3^3)^2 = 27\cdot 27 = 729$

練習問題

練習 1 次を計算して下さい． $\frac{a^3}{b^2c^2} \div \frac{ac}{3b}$

2　独占企業

ここでは独占企業の理論を学びます．今まではずっと完全競争市場を学んできました．市場環境が違いますが，今まで学んできた数学を用いて容易に独占企業の行動を理解することができます．また，学んできた経済数学の応用範囲が実は広かったことを知ることでしょう．良い復習や応用問題として捉えることもできます．

2.1　独占企業の行動

ここでは売り手独占を学びます．買い手側は完全競争と同様に多数の買い手がいるとします．

2.2　売り手独占企業

完全競争市場では企業は価格受容者つまり price taker でした．しかし，売り手である企業が市場に一社しかいない場合はどうなるでしょうか？この独占企業は，ライバル企業に需要を奪われることがないので市場価格をコントロールすることができます．市場価格に直接的に影響を及ぼすことのできる企業を価格設定者あるいは **price maker** といいます

供給側は 1 社しかいませんが，需要側は多数の消費者が独占企業の財を購入する状況を考えましょう．よって，需要側は完全競争の理論と同様に需要曲線があります．一方，供給側は独占なので供給曲線はありません．

いくら独占企業だからといってこの価格でこれだけ買いなさいと消費者に命令することはできません．独占企業が提示した価格で買いたい消費者だけが買います．このときの独占企業が直面する需要関数が以下のようになっているとしましょう．

$$x = D(p) = 1 - p$$

ここで，x は生産量，D は需要関数，p は価格をそれぞれ表わしています．生産量や価格は負になることはありません．よって，仮定として $x \geq 0$ と $p \geq 0$ を設けます．

需要関数とは，市場価格に対してその価格で購入しようと考えている消費者の購入量（需要量）を指定するルールでした．この場合は，その量を x としていますので，つまり，$x = 1 - p$ となります．このような独占企業が付ける価格を引き上げれば消費者が逃げていくという想定を考えます．

企業の目的は利潤を最大にすることでした．もちろん，独占企業も利潤を最大化します．利潤は収入から費用を差し引いた額です．経済学では企業の売り上げのことを収入といいます．

$$\pi = R - C$$

ここで収入を R で，費用を C で表します．収入は英語で revenue，費用は cost なのでその頭文字から R と C が来ています．その差が利潤 π となります．利潤は英語で profit と言いますが，p は価格で既に使われているのでアルファベットの p に対応するギリシャ文字 π で利潤を表すことにしましょう．

収入は価格かける販売数量です．

$$R = \text{価格} \times \text{販売数量} = p \times D(p)$$

価格は price なので p は良いですね？その価格の元での需要量 $D(p)$ を乗じた額がこの独占企業の収入になります．

$$R = p \times (1 - p)$$

次に費用はどうなるでしょうか？独占企業であっても完全競争的な環境で営業している企業であってもものを作るときの費用は同じです．つまり，完全競争とか独占というのは企業が財を供給している競争の場の形態を指している概念です．

このとき独占企業の費用関数が以下のように表されているとしましょう．

$$C(x) = \frac{x^2}{2}$$

この C は費用関数を表しますが，x 単位の生産をすると $x^2/2$ の費用が掛かることを意味します．

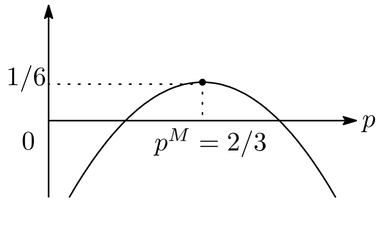
ここで注意しなければならないのは収入は価格 p に関連付けられている一方で，費用は販売量 x に関連付けられていることです．どちらも需要関数 D で関連付けられています．ここでは価格 p で考えてみましょう．独占企業が価格を付けて，それで需要量が決まって，それに見合った生産をすると費用が掛かります．

$$x = 1 - p \text{ を } C(x) = \frac{x^2}{2} \text{ に代入すると } \Longrightarrow C(1-p) = \frac{(1-p)^2}{2}$$

これで収入と費用が求まったので，独占企業の利潤が価格の関数として求まりました．

$$\begin{aligned}\pi(p) = R - C = p(1-p) - \frac{(1-p)^2}{2} &= p - p^2 - \frac{1 - 2p + p^2}{2} \\ &= -\frac{3}{2}p^2 + 2p - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

この利潤の式を平方完成することによって独占企業の利潤を最大にする独占価格が $p^M = 2/3$ と求まります．この p の右肩に付いている M は独占を表わします．独占は英語で monopoly なので M を用いています．



【欄外の図】独占企業の利潤曲線

この独占価格を実際に求めてみましょう．

$$\pi(p) = -\frac{3}{2}p^2 + 2p - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\left(p^2 - \frac{4}{3}p\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\left(\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

カッコの 2 乗の係数は $-3/2$ でマイナスです．2 乗するとゼロ以上の数になります．よって，常識の括弧内をゼロにする価格が π の最大値を達成します．よって，$p^M = 2/3$ が独占企業が付ける価格となります．

このときの独占利潤は，独占価格 $p^M = 2/3$ を $\pi(p)$ に代入して，

$$\pi\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

となります．平方完成で括弧内は 0 になりましたね．さらに，独占価格を需要関数に代入すると独占生産量が求まります．

$$x^M = D\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

このように完全競争で求めた方法と同様の平方完成によって独占価格，独占利潤および独占生産量が求まります．

問い 1　費用関数が $C(x) = x^2$ のときの独占価格と独占利潤を求めてください．

答え 1　$x = 1 - p$ を $C(x) = x^2$ に代入すると $C(1-p) = (1-p)^2$ となります．よって利潤は，$\pi(p) = R - C = p(1-p) - (1-p)^2 = p - p^2 - (1 - 2p + p^2) = -2p^2 + 3p - 1$ となります．平方完成すると $\pi(p) = -2(p - 3/4)^2 + 1/8$ になるので，独占価格は $p^M = 3/4$ となります．そのときの独占利潤は $\pi(3/4) = 1/8$ となります．

このように需要関数を用いて利潤を価格で表現して独占企業の行動を分析することができます．

$$\pi(p) = pD(p) - C(D(p))$$

費用の部分は，費用関数と需要関数の合成関数 $C \circ D$ です．この利潤の式がとても良い形をしているならば，図 1 にある形状をするでしょう．

しかし，費用関数と需要関数の合成するのは少し難しく感じます．また，需要曲線や費用関数は価格と数量の平面で表わされています．よって，需要関数によって価格と数量が一対一に対応するのであれば数量を変数として考えることもできます．次にその方法を考えてみましょう．

2.3　逆需要関数を用いる

練習問題

需要関数が $x = D(p) = 1 - p$ で与えられているとします．以下の問いに答えてください．

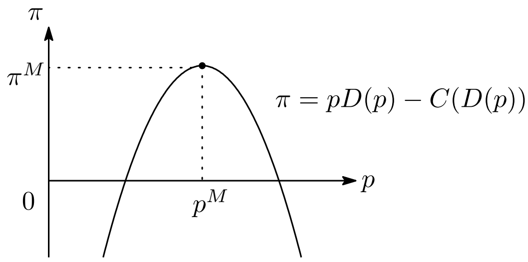


図 1: 価格を変数としたときの独占企業の利潤曲線

練習 1 逆需要関数を求めてください.

練習 2 生産量 x に関する独占企業の利潤の式を求めてください.

練習 3 独占生産量を求めてください.

練習 4 独占価格を求めてください.

練習 5 最適な利潤を求めてください.

需要の価格弾力性と限界収入を考えます.

3 需要の価格弾力性

需要の価格弾力性は微分で以下のように表現できます.

$$\varepsilon = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

このとき需要量は q であり，価格は p であり，需要の価格弾力性をギリシャ文字 ε（イプシロン）で表わしています.

例 1 市場価格が p であるとき需要関数が $D(p) = 1 - p$ となっているとします。このときの需要の価格弾力性を価格 p の関数として求めてください.

解答 1 需要量 q を $q = D(p)$ として D を微分します.

$$\frac{dq}{dp} = (1-p)' = (1)' - (p)' = 0 - 1 = -1$$

よって，需要の価格弾力性は下のようになります。

$$\varepsilon = -(-1)\frac{p}{q} = -(-1)\frac{p}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$

もちろん，この需要の価格弾力性は q の関数としても表現することができます.

$$\varepsilon = \frac{p}{1-p} = \frac{1-q}{1-(1-q)} = \frac{1-q}{q}$$

価格変化による需要量の変化は $D'(p)$ ですので，需要の価格弾力性はで以下のように書き換えることができます．

$$\varepsilon = -D'(p)\frac{p}{D(p)}$$

このように需要の価格弾力性は，価格の関数として $-D'(p)p/D(p)$ と表現できました．

4　限界収入と需要の価格弾力性

企業の収入は価格と販売数量の積で表わされました．

$$MR = p\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

この章では経済厚生の最大化の上限を導き出します．

5　経済厚生

経済厚生は消費者の純便益と企業の利潤の和です．経済厚生は消費者余剰と生産者余剰の和ですので総余剰とも呼ばれます．厚生は生活の豊かさを表わします．それは消費者と企業の利益の和となるのです．厚生を英語で welfare というので記号 W で表わしましょう．

$$W = U + \pi \tag{1}$$

経済厚生を考えるときには経済全体を見ます．企業の販売収入と消費者の支出額は一致しています．よって，それらは相殺されることが分かるでしょう．

例 1　効用関数が $u(x) = -x^2/2 + x$ であり，企業の費用関数が $C(x) = x^2$ であるとします．経済厚生は市場価格 p に依存しないことを示してください．

解答 1　消費者の消費者余剰と彼の所得の和 U は次で表現できました．

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + x + m - px$$

一方で，企業の利潤 π はこれです．

$$\pi(x) = px - \frac{x^2}{2}$$

よって，経済厚生の定義 (1) からこのケースの経済厚生は下の式になります．

$$
\begin{aligned}
W(x) = U(x) + \pi(x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + x + m - px\right) + px - \frac{x^2}{2} \\
&= -\frac{x^2}{2} + x + m - \frac{x^2}{2} = -x^2 + x + m
\end{aligned}
$$

ここで支出と収入が消えています．

このように一般的な効用と費用でも支出と収入が消えることが分かるでしょう．

問い 1　消費者の効用関数が u，彼の所得が m，企業の費用関数が C のときの経済厚生を求めてください．

答え 1　市場価格を p とすると，$U(x) = u(x) + m - px$, $\pi(x) = px - C(x)$ より経済厚生は $W = U(x) + \pi(x) = u(x) + m - px + (px - C(x) = u(x) + m - C(x)$ となります．

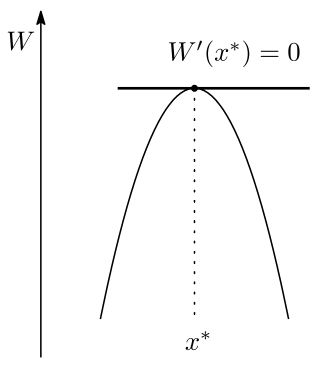
6　経済厚生の最大化条件

経済厚生は問いより以下の式で表わされます．

$$W(x) = u(x) + m - C(x)$$

この経済厚生を最大化させる生産量を求めるために，経済厚生を微分してみましょう．所得 m は生産量に依存しないので定数として扱います．

$$W'(x) = (u(x) + m - C(x))' = u'(x) - C'(x)$$



【欄外の図】厚生曲線

もし図のように経済厚生のグラフが山型であるならば，経済厚生を最大にする生産量はその頂点で達成されます．そのとき，厚生曲線の接線の傾きは 0 になります．つまり，$W'(x^*) = 0$ を満たす x^* が経済厚生を最大にしています．よって，

$$W'(x^*) = 0 \Longleftrightarrow u'(x^*) - C'(x^*) = 0 \Longleftrightarrow u'(x^*) = C'(x^*)$$

が成り立ちます．効用関数を微分したものは限界効用であり，費用関数を微分したものは限界費用ですから，以下が成り立ちます．

経済厚生の最大化条件

経済厚生が最大化されていれば，限界効用と限界費用が等しくなる．

$$MU = MC$$

競争市場では価格 p を通じて $MU = p$ と $MC = p$ からこの経済厚生の最大化条件が満たされていることが分かります．

独占企業の行動をもう一度分析します．

7 限界収入

限界収入を積の微分で導出しましょう．

7.1 限界収入と積の微分

収入は価格と販売数量の積です

$$R = 価格 \times 販売数量$$

第 2.2 項では収入を $p \times D(p)$ と表現しました．ここでは逆需要関数を用いて独占企業の生産量の関数として収入を考えます．

$$R(x) = P(x)x \quad (P \text{ は逆需要関数})$$

この R を x で微分したものが限界収入です．それは価格と生産量の積になっているので，積の微分を用います．

$$MR = \frac{dR}{dx}(x) = (P(x)x)' = P'(x)x + P(x)(x)' = P'(x)x + P(x)$$

限界収入

$$MR = \frac{dR}{dx}(x) = P'(x)x + P(x)$$

この限界収入は完全競争の場合も含まれています．完全競争の場合は企業は市場価格に影響を及ぼせません．よって，逆需要関数は定数になります．

$$P(x) = p \quad (p \text{ は市場価格})$$

定数を微分すると 0 ですから，以下が成り立ちます．

$$MR = P'(x)x + P(x) = 0 \cdot x + p = p$$

完全競争市場の限界収入

$$MR = p \quad (p \text{ は市場価格})$$

次に限界収入を分解して，以前行った限界収入を価格と需要の価格弾力性の式で表した表現に持って行きましょう．つまり，限界収入を $P'x+P$ から $p(1-1/\varepsilon)$ のような形に持って行きます．

$$MR = P'x + P = P\left(1 + \frac{P'x}{P}\right) = P\left(1 - \frac{-P'x}{P}\right) = P\left(1 - \frac{1}{\frac{P}{-P'x}}\right)$$

この括弧内の二番目の項の分母を取り出すと，

$$-\frac{P(x)}{P'(x)x}$$

となります．これは公式より需要の価格弾力性になります．

$$\varepsilon = -\frac{P(x)}{P'(x)x}$$

この式より需要の価格弾力性を消費量の関数として表現することができました．ここで需要関数で表された式とを比較してみます．

$$\varepsilon = -D'(p)\frac{p}{D(p)}$$

このとき $p = P(x)$ であるり，$x = D(p)$ ですので，

$$D'(p) = \frac{1}{P'(x)}$$

が成り立ちます．ここで，$D' = dx/dp$ であり，$P' = dp/dx$ なので，

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}$$

が成り立っています．

7.2 限界収入曲線と逆需要曲線

限界収入曲線と逆需要曲線の関係を調べてみましょう．収入を $R = px$ とすると価格は平均収入であることが分かります．

$$AR = \frac{R}{x} = \frac{px}{x} = p$$

この平均収入は平均は英語で average なので AR としています．この平均収入曲線は逆需要曲線が右下がりなので，右下がりの曲線です．この AR を微分するには積の微分が必要です．ここは R を分解せずに微分してみます．

$$\frac{dAR}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{R}{x}\right) = \frac{R' \cdot x - R \cdot (x)'}{x^2} = \frac{MR \cdot x - R}{x^2}$$

逆需要曲線が右下がりなので，平均収入曲線も右下がりです．したがって，微分係数は負になります．

$$MR \cdot x - R < 0 \iff MR < \frac{R}{x} = AR$$

よって，逆需要曲線が右下がりならば，限界収入は平均収入すなわち価格よりも小さくなります．

$$\text{逆需要曲線が右下がり} \iff MR < AR$$

この性質は，図 2 にある直線の逆需要曲線に対して，左下に位置する傾きの絶対値が 2 倍になる限界収入曲線の様子を意味しています．

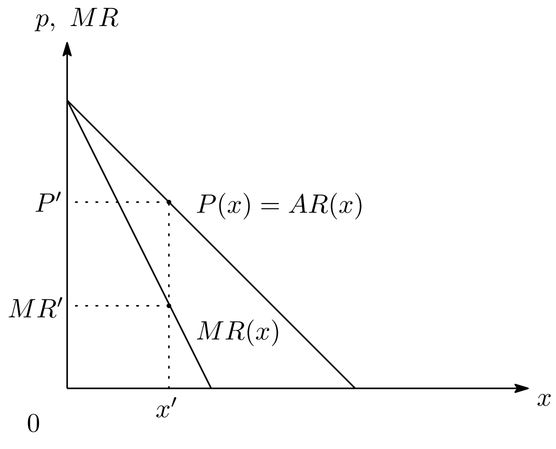


図 2: 限界収入と価格 (平均収入) の位置関係

見方を変えると，平均費用曲線が右下がりであれば，限界費用は平均費用よりも小さくなることと本質的に同じことを意味しています．

$$\text{平均費用曲線が右下がり} \iff MC < AC$$

【欄外の図】右下がりの平均費用曲線

第 1 章

需要関数が $x = D(p) = 1 - p$ で与えられているとします．以下の問いに答えてください．

解答 1 $p = P(x) = 1 - x$

$\boxed{\text{解答 } \mathbf{2}}$ $\pi^M(x) = -2x^2 + x$

$\boxed{\text{解答 } \mathbf{3}}$ $x^M = \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{解答 } \mathbf{4}}$ $p^M = \frac{3}{4}$

$\boxed{\text{解答 } \mathbf{5}}$ $\pi^M(x^M) = \frac{1}{8}$